אי-שוויונים

1. a,b,c מספרים ממשיים חיוביים הוכח את שני האי-שוויונים הבאים:
$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$
$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

2. יהי n מספר טבעי. הוכח כי
$$1 \geq \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2}$$

3. נתונים מספרים ממשיים חיוביים a,b,c אשר מקיימים $a,b<1<c$ ו- $abc=1$.
מי גדול יותר $a+b+c$ או $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$?

4. מצא את כל הפתרונות הממשיים של המשוואה
$$3^x+4^x=5^x$$

5. האם קיימים שני טרפזים, כאלו שאורכי הצלעות של כל אחד מהטרפזים הינם a,b,c,d ובסיסים של אחד מהם הינם a ו- c ושל השני b ו- d?

6. נתונים מספרים ממשיים כלשהם $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n}$. הוכח את האי-שוויון הבא:
$$(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})^2 \geq 4n(a_1a_{n+1}+a_2a_{n+2}+\cdots+a_na_{2n})$$

7. יהיו a,b,c מספרים ממשיים שונים. הוכח כי
$$\left|\frac{a}{b-c}\right|+\left|\frac{b}{c-a}\right|+\left|\frac{c}{a-b}\right| \geq 2$$

בתיאבון!