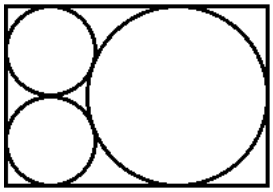
אולימפיאדה ארצית ע''ש פרופ' גיליס
תשע''ב
פתרונות



1. המעגלים בציור משיקים זה לזה ולצלעות של המלבן.
רדיוס המעגל הגדול שווה ל-1. חשב\י את השטח של המלבן.

פתרון. קודם נבדוק ששני המעגלים הקטנים באותו גודל. נניח שלא, למשל המעגל בפינה השמאלית עליונה גדול ממעגל בפינה השמאלית תחתונה. אז הוא יותר קרוב גם לצד השמאלי של המלבן וגם לצד האופקי. לכן מרחק בין מרכז המעגל השמאלי תחתון למרכז המעגל הגדול יותר גדול ממרחק בין מעגל שמאלי עליון למרכז מעגל הגדול. זה לא יכול להיות: כל אחד משני מרחקים האלה שווה לסכום הרדיוסים של מעגלים המתאימים, לכן דווקא המספר השני צריך להיות יותר גדול.
באופן דומה פודלים את האפשרות שבה המעגל השמאלי העליון יותר קטן.
כעת נעבור לחישובים. ברור שגובה של המלבן שווה 2.
לכן רדיוס של כל מעגל קטן שווה $\frac{1}{2}$. בשביל לחשב את הרוחב נעביר במלבן שלנו את הקטע האמצעי האופקי. אפשר להרכיב אותו משלושה חלקים: חלק השמאלי שווה לרדיוס של המעגל הקטן $=\frac{1}{2}$, חלק ימני הוא רדיוס של המעגל הגדול $=1$, וחלק אמצעי הוא ניצב במשולש ישר זווית שניצב אחר בו הוא רדיוס של מעגל קטן והיתר בו שווה לסכום הרדיוסים. לכן לפי משפט פיתגורס נחלק באמצעי שווה ל-
$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9-1}{4}}=\sqrt{2}$.
לכן הרוחב כולו שווה ל-$\sqrt{2}+\frac{3}{2}$.
השטח זה גובה כפול רוחב והוא שווה ל-$2\sqrt{2}+3$.

2. צבא של מדינה זרה מבצע שמירה מסביב לשעון על אובייקט סודי. השמירה מתבצעת על ידי 7 שומרים. לכל שומר יש שמירה של 7 שעות רצופות בכל יום, בשעות קבועות. הוכח שאפשר להוציא את אחד השומרים מסבב השמירות ולשלוח אותו לצבוע אובייקט סודי אחר, כך שעדיין תהיה שמירה מסביב לשעון על האובייקט הסודי, מבלי שיהיה צורך לשנות את שעות השמירה של אף שומר אחר.

פתרון. נסתכל על רשימת שמירות. בסה"כ יש 49 שעות שמירה, שזה יותר מאשר פי 2 של יממה שלמה. לכן יש רגע שבו שמרו שלושה שומרים. מבין השומרים האלה יש אחד (נסמן אותו A) שהתחיל לשמור ראשון, ויש כזה (נסמן אותו C) שהתחיל לשמור אחרון. ויש גם את זה שהתחיל לשמור באמצע, נקרא לו B.
את B אפשר להוציא מהשמירות ולשלוח אותו לצבוע: הרי A עלה לשמירה לפניו, C עלה לשמירה לפני ש- A סיים ונשאר גם אחרי סוף השמירה של B.

3. נתון: $a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)=0$. הוכח\י כי $ab+bc+ca\le 0$.

פתרון ראשון. קל לראות כי $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\geq 0$.

אי-שוויון האחרון הופך לשוויון רק כאשר $a=b=c$. בהינתן התנאי של השאלה שלנו, זה מקרה לא מעניין: זה יקרה רק כאשר $6a^4=0$ כלומר $a=b=c=0$.

לכן אפשר להניח שזה לא המקרה, כלומר $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$.

אז הסימן של $ab+bc+ca$ זהה לסימן של

$$\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left(ab+bc+ca\right)=a^3b+b^3a+c^2ab-a^2b^2-ab^2c-a^2bc+...$$

כאשר "..." מסמן עוד שני ביטויים סימטריים לביטוי שנרשם (פתחנו רק את הסוגר הראשון כפול ab).

כאשר נפתח את הסוגריים עד הסוף ונסכם את הביטויים הסימטריים, נקבל סכום של:

א. ביטויים מהסוג a^3b שסכומם לפי נתון שווה 0.

ב. סכום של 3 ביטויים מסוג a^2bc עם סימן מינוס. בעצם הוא יופיע פעם אחד עם פלוס ופעמיים עם מינוס, סה"כ פעם אחד עם מינוס.

ג. עם סימן מינוס סכום של a^2b^2.

בסה"כ נקבל:

$$\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\left(ab+bc+ca\right)=-\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2bc+b^2ac+c^2ab\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\left(ab+bc\right)^2+\left(bc+ca\right)^2+\left(ca+ab\right)^2\right)\leq 0$$

מש"ל.

פתרון שני. נתחיל בנתון: $ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ac\left(a^2+c^2\right)=0$. נוסיף אותו דבר לשני האגפים: $ab\left(a^2+b^2+c^2\right)+bc\left(a^2+b^2+c^2\right)+ac\left(a^2+c^2+b^2\right)=a^2bc+ab^2c+abc^2$.

$$\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=abc\left(a+b+c\right)$$

פרט למקרה שבו $a=b=c=0$ שהוא לא מעניין, מותר לחלק ב-$\left(a^2+b^2+c^2\right)$ כי הוא חיובי

$$ab+bc+ca=\frac{abc\left(a+b+c\right)}{a^2+b^2+c^2}$$

כעת ננתח את הסימנים האפשריים של a,b,c. קודם כל לא יתכן שכולם חיוביים שכולם שליליים כי זה סותר את המשוואה הנתונה (במקרים אלה נקבל שסכום של 6 מספרים חיוביים שווה 0).

לכן יש לפחות מספר אחד לא חיובי ולפחות מספר אחד לא שלילי.

נשים לב שאם נחליף בו-זמנית סימנים של a,b,c אז שני הדברים שנתונים בתנאי השאלה, גם המשוואה וגם האי-שוויון $ab+bc+ca\leq 0$, ישארו אותו דבר. לכן מותר להניח שמספר אחד לא חיובי, ושני מספרים אי-שליליים, ללא הגבלת הכלליות $a\leq 0\leq b,c$. אם בנוסף $a+b+c\geq 0$, ואז נקבל $\frac{bc\left(a+b+c\right)}{a^2+b^2+c^2}\geq 0$ ולכן $ab+bc+ca=\frac{abc\left(a+b+c\right)}{a^2+b^2+c^2}\leq 0$.

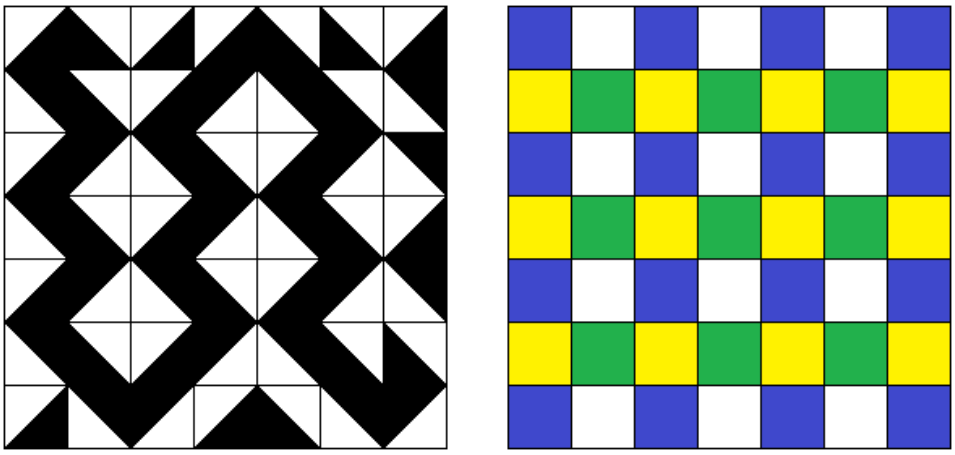
במקר האחר כאשר $a+b+c<0$, אז גם $a+b<0$, ואז כמובן $ab+bc+ca=ab+c\left(a+b\right)\leq 0$ כי שני המחוברים קטנים או שווים ל-0. כלומר בכל מקרה קיבלנו ש-$ab+bc+ca\leq 0$.

פתרון שלישי. נסמן $\underbrace{bc}_{X_1}\underbrace{\left(b^2+c^2\right)}_{W_1}+\underbrace{ac}_{X_2}\underbrace{\left(a^2+c^2\right)}_{W_2}+\underbrace{ab}_{X_3}\underbrace{\left(a^2+b^2\right)}_{W_3}=0$.

קל לראות שלא כל ה-X_i חיוביים (אחרת 0 חיובי) ולא כולם שליליים (אחרת 0 שלילי). כלומר, אם אחד מהם חיובי אז אחד אחר חייב להיות שלילי ולהפך. בנוסף גם ברור ש-$X_1X_2X_3=a^2b^2c^2\geq 0$, לכן מבין ה-$X_i$ יש אחד שהוא שלילי ושניים שהם לא חיוביים.

קל לראות שכמה ש-$\left|X_i\right|$ יותר גדול כך גם W_i יותר גדול. בביטוי $W_1X_1+W_2X_2+W_3X_3=0$ המחובר החיובי היחיד חייב לאזן את שני הביטויים האחרים, לכן הוא הכי גדול בערך המוחלט. לכן אם אנחנו נשמיט את המקדמים W_i אז ערך מוחלט של המחובר החיובי יקטן פי לא פחות פעמים מאשר ערך מוחלט של המחוברים השליליים. לכן $X_1+X_2+X_3=0$.

4. נתון לוח משבצות 7×7. בכל משבצת מסמנים את אחד האלכסונים, וצובעים את אחד המשולשים שנוצרים בשחור. השטח הגדול ביותר שיכול לתפוס גוש שחור רציף (רציף פירושו מחובר בצלעות)?
תשובה: 39/2 = 19.5



פתרון. בציור מצד שמאל יש גוש של 39 משולשים, ושטחו 19.5.
נשאלת השאלה: האם אפשר יותר? האם אפשר ליצור גוש של 40 משולשים?
כל משולש מחובר לכל היותר לשני משולשים. לכן גוש משולשים יוצר מסלול (לכל משולש יש יציאה אחת וכניסה אחת לכל היותר). מסלול זה עובר ממשבצת למשבצת צמודה, וכל מהלך מאונך למהלך הקודם. לכן כל תוך שני מהלכים אנחנו עוברים ממשבצת למשבצת צמודה אליה באלכסון.
לכן בכל צעד זוגי אנחנו נמצאים במשבצת בצבע שחור ובמהלך אי זוגי במשבצת לבנה לפי צביעת שחמט. נצבע את המשבצות השחורות של צביעת שחמט בשני צבעים: ירוק וכחול, בהתאם לזוגיות של מספר שורה. אז תוך שני מהלכים אנחנו עוברים מירוק לכחול או מכחול לירוק. לכן בכל רבייה של מהלכים רצופים יש משבצת ירוקה אחת לפחות.
אבל אנו רואים בציור שיש רק 9 משבצות ירוקות, ולכן לא יכולות להיות 40 נקודות במסלול.

5. מצא את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $a^3+3ab^2+7b^3=2011$.

תשובה. אין פתרונות למשוואה.

פתרון ראשון. נראה שזה לא יתכן מודולו 7. מודולו 7 השוויון זהה ל- $a^3+3ab^2=2 \pmod 7$.

נתבונן בחזקות שלישיות מודולו 7: $0^3=0;\ (\pm1)^3=\pm1;\ (\pm2)^3=\pm8=\pm1;\ (\pm3)^3=\pm27=\mp1$

זאת אומרת שלכל u שלם מתקיים $u^3=\pm1,0 \pmod 7$.

אזי עבור u ו- v שלמים $u^3+v^3=\pm2,\pm1,0 \pmod 7$, או במילים אחרות $u^3+v^3\neq\pm4 \pmod 7$.

נציב $u=a+b, v=a-b$ ונקבל $2a^3+6ab^2=u^3+v^3\neq\pm4 \pmod 7$. לאחר חילוק ב-2 נקבל $a^3+3ab^2\neq\pm2 \pmod 7$. בפרט זאת אומרת ש- $a^3+3ab^2\neq2 \pmod 7$.

פתרון שני. בהרבה שאלות שבהם מדברים על חזקות שלישיות של מספרים שלמים כדאי להסתכל על מה שקורה מודולו 9. אכן

$$(3k)^3=27k^3=9M$$
$$(3k+1)^3=27k^3+27k^2+9k+1=9M+1$$
$$(3k-1)^3=27k^3-27k^2+9k-1=9M-1$$

כלומר חזקה שלישית תמיד שווה ל-0, 1 או -1 מודולו 9 (בהתאם לשארית של המספר מודולו 3). לכן מודולו 9 המשוואה $a^3+3ab^2+7b^3=2011$ נראית כך:

$$(\pm1\text{ או }0)+3k+(\pm2\text{ או }0)=4 \pmod 9.$$

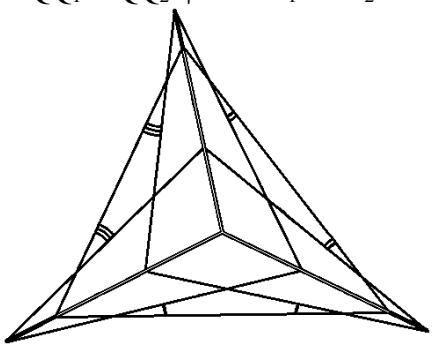
ברור שאם $3k=3ab^2$ מתחלק ב-9 אז $(\pm1\text{ או }0)+(\pm2\text{ או }0)=4 \pmod 9$. וזה לא יתכן. לכן גם a וגם b לא מתחלקים ב-3. לכן מקבלים ביטוי $\pm1\pm3\pm2=4 \pmod 9$. את זה אפשר להשיג רק בדרך אחת: $-1+3+2=4 \pmod 9$.

זה מתאים למצב שבו $2=7b^3 \pmod 9$ אך ורק כאשר $-1=b^3 \pmod 9$ כלומר $-1=b \pmod 3$.

באופן דומה $-1=a^3 \pmod 9$ אך ורק כאשר $-1=a \pmod 3$.

אבל אז $ab^2=-1 \pmod 3$ ולכן $3ab^2=-3\neq3 \pmod 9$. לכן זה לא יכול להיות.

6. במישור נתונות נקודות O, A, B, C כך שהזוויות AOB, BOC, COA קהות. על OA, OB, OC נבחרו נקודות X, Y, Z בהתאמה כך ש- OX = OY = OZ. על הקטעים OX, OY, OZ נבחרו נקודות K, L, M בהתאמה. הקווים AL ו-BK נחתכים בנקודה R שלא נמצאת על XY. הקטע XY חותך את BK ואת AL בנקודות R_1, R_2. הקווים CL ו-BM נחתכים בנקודה P שלא נמצאת על YZ. הקטע YZ חותך את BM ואת CL בנקודות P_1, P_2. הקווים CK ו-AM נחתכים בנקודה Q שלא נמצאת על XZ. הקטע XZ חותך את AM ואת CK בנקודות Q_1, Q_2. הוכח שאם $PP_1 = PP_2$ ובנוסף $QQ_1 = QQ_2$ אז גם $RR_1 = RR_2$.



פתרון. נוכיח שקילות של שני תנאים הבאים:

(א) $RR_1 = RR_2$

(ב) $OK\times OA = OL\times OB$.

ובכן, היות ו-OY = OX, אז גם הזוויות OXY, OYX שוות. זווית חיצונית שווה לסכום הזוויות הפנימיות, לכן $OBK = OYX - R_1R_2R$, $OAL = OXY - R_2R_1R$.

לכן תנאי א' מתקיים אם ורק אם זוויות R_2R_1R , R_1R_2R שוות וזה אם ורק הזוויות OAL, OBK שוות. זה שקול לכך שהמשולשים OAL, OBK דומים (הרי זוויות O משותפת). זה שקול לכך שהיחס של הצלעות המתאימות במשולשים אלה זהה, כלומר $\frac{OA}{OL} = \frac{OB}{OK}$. אבל זה בדיוק תנאי ב'.

באופן דומה אפשר להוכיח שתנאי $PP_1 = PP_2$ שקול ל-$OM \times OC = OL \times OB$ ושתנאי $QQ_1 = QQ_2$ שקול ל-$OK \times OA = OM \times OC$.

עכשיו קל לסיים את ההוכחה. נתון לנו ש-$PP_1 = PP_2$ ובנוסף $QQ_1 = QQ_2$ לכן

$$OK \times OA = OM \times OC = OL \times OB$$

ולכן $RR_1 = RR_2$. מש"ל.