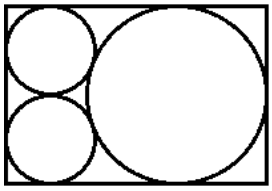
אולימפיאדה ארצית ע''ש פרופ' גיליס

תשע''ב

יש להוכיח כל טענה ולנמק כל תשובה. לא יינתנו נקודות לתשובה נכונה ללא פתרון מלא.



1. המעגלים בציור משיקים זה לזה ולצלעות של המלבן.
רדיוס המעגל הגדול שווה ל-1. חשב\י את השטח של המלבן.

2. צבא של מדינה זרה מבצע שמירה מסביב לשעון על אובייקט סודי. השמירה מתבצעת על ידי 7 שומרים. לכל שומר יש שמירה של 7 שעות רצופות בכל יום, בשעות קבועות. הוכח שאפשר להוציא את אחד השומרים מסבב השמירות ולשלוח אותו לצבוע אובייקט סודי אחר, כך שעדיין תהיה שמירה מסביב לשעון על האובייקט הסודי, מבלי שיהיה צורך לשנות את שעות השמירה של אף שומר אחר.

3. נתון: $a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)=0$. הוכח\י כי $ab+bc+ca\le 0$.

4. נתון לוח משבצות 7×7. בכל משבצת מסמנים את אחד האלכסונים, וצובעים את אחד המשולשים שנוצרים בשחור. מה השטח הגדול ביותר שיכול לתפוס גוש שחור רציף (רציף פירושו מחובר בצלעות)?

5. מצא את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $a^3+3ab^2+7b^3=2011$.

6. במישור נתונות נקודות O, A, B, C כך שהזוויות AOB, BOC, COA קהות. על OA, OB, OC נבחרו נקודות X, Y, Z בהתאמה כך ש- OX = OY = OZ. על הקטעים OX, OY, OZ נבחרו נקודות K, L, M בהתאמה. הקווים AL ו-BK נחתכים בנקודה R שלא נמצאת על XY. הקטע XY חותך את BK ואת AL בנקודות R_1, R_2. הקווים CL ו-BM נחתכים בנקודה P שלא נמצאת על YZ. הקטע YZ חותך את BM ואת CL בנקודות P_1, P_2. הקווים CK ו-AM נחתכים בנקודה Q שלא נמצאת על XZ. הקטע XZ חותך את AM ואת CK בנקודות Q_1, Q_2. הוכח שאם $PP_1 = PP_2$ ובנוסף $QQ_1 = QQ_2$ אז גם $RR_1 = RR_2$.

בהצלחה!