מספרי פיבונצ'י

על מנת לחסוך וויכוח, נסכים ש-$f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

1. במדינה ר' יש רק שני אנשים שמסוגלים להיות נשיא (לשניהם חיי נצח). נשיא נבחר לארבע שנים, ואסור שאותו נשיא ישלוט ברצף יותר מ-8 שנים. כמה שיטות משטר יכולות להיות במדינה ר' ב-100 שנים ראשונות שלה?

2. א. בכמה דרכים אפשר לרצף את הטבלה $2\times n$ ע"י דומינו (כלומר מלבנים 2×1)?
ב. בכמה דרכים אפשר לרצף את הטבלה $3\times n$ ע"י מלבנים 3×1?

3. אוסף משקולות נקרא טוב עד N, עם אפשר באמצעות משקולות אלה להרכיב כל משקל מ-1 עד N.
א. מהו ה-N הגדול ביותר, עבורו יש אוסף של 10 משקולות שהוא טוב עד N?
ב. מהו ה-N הגדול ביותר, עבורו יש אוסף של 10 משקולות שיהיה טוב עד N, אפילו עם משקולת כלשהי תלך לאיבוד?
ג. מהו ה-N הגדול ביותר, עבורו יש אוסף של 10 משקולות שיהיה טוב עד N, אפילו עם שתי משקולות משקולת כלשהן ילכו לאיבוד?

4. הוכח\י כי

א. $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$ ב. $f_n f_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2} = \pm 1$

5. מצא\י נוסחאות פשוטות עבור:

א. $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ ב. $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n+1}$

ג. $f_1 + f_4 + f_7 + \ldots + f_{3n+1}$ ד. $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2$

מספרי פיבונצ'י – המשך

6. הוכח\י כי $f_n f_{k+1} + f_{n-1} f_k = f_{n+k}$.

7. מצא\י את כל הסדרות ההנדסיות שמקיימות את נוסחת פיבונצ'י $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

8. הוכח\י כי $f_n = \frac{\varphi_1^n - \varphi_2^n}{\sqrt{5}}$. (למש שווים $\varphi_{1,2}$?)

9. מה יותר גדול: f_{100} או 10^{10}?

10. פשט את הביטוי $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}}}+1$.

11. הוכח\י כי קיים $0 < k < 1000000$ עבורו f_k מסתיים ב-
   א. 000.
   ב. 999.

12. מצא\י את המחלק המשותף הגדול ביותר של $f_{f_{f_{5775}}}$ ושל $f_{f_{f_{5770}}}$.

13*. תאר את כל זוגות המספרים הטבעיים a,b עבורם a^2+1 מתחלק ב-b וגם b^2+1 מתחלק ב-a.