קומבינטוריקה
שובך יונים

1. בתוך טבלה 5770×5770 רשומים מספרים $1,2,3,\ \ldots\ ,5770^2$. הוכח כי קיים זוג מספרים במשבצות שכנות שסכומם מתחלק ב- 4. (משבצות הינן שכנות אם יש להן קדקוד משותף).

2. A קבוצה של מספרים טבעיים, בת 2887 אברים, וכל אבריה לא עולים על 5772. הוכח שיש שתי אברים של A שהם מספרים זרים.

3. א. נבחרו 101 מספרים שלמים. הוכח שניתן לבחור חלק מהם כך שסכום יתחלק ב- 101.
   ב. הפעם נבחרו רק 100 מספרים שלמים, אבל לא כולם זהים מודולו 101. האם הפעם ניתן לבחור חלקם כך שהסכום יתחלק ב- 101?

4. א. הוכח שבין 5 נקודות בריבוע היחידה יש זוג עם מרחק בינם לכל היותר $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   ב. מבין 4 נקודות בריבוע היחידה יש זוג עם מרחק בינם לכל היותר 1.

5. A זו קבוצה של 20 מספרים טבעיים קטנים מ-1000.
   א. הוכח שקיימות שתי תת-קבוצות של A זרות ולא ריקות כך שסכום אברים של קבוצה הראשונה שווה לסכום אברים של קבוצה השנייה.
   ב. הוכח את סעיף א' בתנאי נוסף – "לקבוצות הנ"ל מספר האברים זהה."

בתיאבון!