1. חילקו מעגל ל- $2n$ קשתות זהות, באמצעות n ישרים שכל אחד מהם עובר דרך מרכז המעגל. מתוכן, n קשתות כלשהן נצבעו בכחול, והשאר נצבעו באדום. המספרים $1,2,3,\ldots n$ נרשמו על הקשתות הכחולות באופן הבא: נבחרה קשת כלשהי ונרשם עליה 1. על הקשת הכחולה הבאה בכיוון השעון נרשם 2. על הקשת הכחולה שאחריה בכיוון השעון רשמו 3, וכך הלאה. גם על הקשתות האדומות נרשמו המספרים $1,2,3,\ldots n$ באופן דומה, רק שכיוון ההתקדמות היה נגד כיוון השעון.

   הוכח שיש n קשתות רצופים שרשומים עליהם כל המספרים $1,2,3,\ldots n$.

2. $n \geq 4$ שחקניות טניס השתתפו בתחרות. כל אחת שיחקה נגד כל אחת אחרת פעם אחת בדיוק (הערה: במשחק טניס אין תיקו). חבורה בת 4 שחקניות נחשבת "גרועה" אם: אחת מבינן הפסידה נגד השאר (בחבורה זאת), ובמשחקים מבין שלושת האחרות – כל אחת ניצחה פעם אחד בדיוק. עבור שחקנית מספר i נסמן ב- w_i את כמות ניצחונות שלה, וב- l_i את כמות הפסדים שלה. בהינתן שאין חבורות גרועות, הוכח כי $\sum_{i=1}^{n}\left(w_i - l_i\right)^3 \geq 0$.

3. נתבונן במשחק החיים: יש טבלה אינסופית, וכל משבצת בטבלה הינה חיה או מתה. כל תור חלק מהמשבצות נהיות חיות וחלק מתות, לפי הכללים הבאים (משבצות נקראות שכנות אם יש להן קודקוד משותף):
   א. משבצת חיה שיש לה 2 או 3 שכנות חיות נשארת חיה בתור הבא, אחרת היא מתה.
   ב. משבצת מתה שיש לה בדיוק 3 שכנות חיות נהיית חיה בתור הבא, אחרת נשארת מתה.
   האם לכל מצב במשחק החיים קיים מצב קודם לו?

4. נתבונן בצורה הבאה: נתחיל מלוח משבצות $n \times n$ ונעיף את האלכסון הראשי (המשבצות (k,k) $1 \leq k \leq n$) ומשבצות מעליו. לצורה המתקבלת נקרא מדרגות בגובה n. חתכו "מדרגות בגובה 2^n" למלבנים. מהו סכום המזערי של היקפי המלבנים שיכול להתקבל?

5. נתון משולש ישר זווית בעל יתר באורך d. נקודות $P_1, P_2, \ldots P_n$ הינן בתוך המשולש. הוכח שקיימת פרמוטציה σ של n אברים כך ש-

$$\left|P_{\sigma_1}P_{\sigma_2}\right|^2 + \left|P_{\sigma_2}P_{\sigma_3}\right|^2 + \ldots + \left|P_{\sigma_{n-1}}P_{\sigma_n}\right|^2 \leq d^2$$

בתיאבון!

I. לקוסם חפיסת 36 קלפים שמונחים על השולחן עם התמונה כלפי מטה. הקוסם חייב לחזות את הצורה (יהלום, לב, עלה או תלתן) של הקלף העליון בחפיסה; לאחר מכן מראים לו את הקלף, והוא חוזה את הצורה של הקלף הבא; וכך הלאה. מטרתו לחזות נכון את צורת הקלף מספר מרבי של פעמים. בפועל, הקלפים אינם סימטריים, ולפני שהוא חוזה את צורת הקלף, רואה הקוסם, באיזה משני הכוונים מכוון הקלף. משרת מושחת מניח את הקלפים על השולחן ומכוון כל קלף בחפיסה לאחד משני כיוונים, ע"פ התיאום עם הקוסם, בלי לשנות את סדרם. לפי שיטה זו, האם יוכל הקוסם להבטיח שינחש את צורתם של

א. יותר ממחצית הקלפים?

ב. לא פחות מ- 20 קלפים?

ג. האם תוכל להגדיל את כמות הקלפים?

II. מבחן אמריקאי מורכב מ-30 שאלות, לכל שאלה יש שתי תשובות אפשריות (אחת נכונה, והשנייה שגויה). כל פעם שאבישי ניגש למבחן הוא עונה על כל השאלות. בסוף המבחן אומרים לו כמה תשובות נכונות היו לו. בהתחלה אבישי לא יודע את התשובה הנכונה לאף שאלה. בתנאי שהשאלון תמיד נשאר אותו דבר, האם יצליח אבישי

א. לגלות את כל התשובות הנכונות תוך 29 מבחנים (ולענות הכל נכון במבחן ה-30)?

ב. לגלות את כל התשובות הנכונות תוך 24 מבחנים (ולענות הכל נכון במבחן ה-25)?

ג. האם תוכל להקטין את כמות המבחנים?

בתיאבון!