תרגיל בתורת המספרים

1. מצא את כל המספרים הטבעיים n שעבורם

א. 2^n-1 מתחלק ב-n^2.

ב. 2^n+1 מתחלק ב-n^2.

2. הוכח כי $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{3n+1}$ אינו שלם.

3. נתבונן בשבר $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1}=\frac{n}{m}$ כאשר $p>3$ ראשוני.

א. הוכח כי n מתחלק ב-p.

ב*. הוכח כי n מתחלק ב-p^2.

4. א. הוכח כי לכל m, n טבעיים $\frac{(2m)!(2n)!}{n!m!(n+m)!}$ זה מספר שלם.

ב. נסמן ב-$[n]!=1\cdot 11\cdot 111\cdot 1111\cdot ...$ כאשר במכפלה יש n גורמים. הוכח כי $\frac{[n+m]!}{[n]!\cdot[m]!}$ שלם.

5. נתונה סדרה $f_1=1$; $f_2=20$; $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. מצא את כל האיברים שמתחלקים ב-379.

6. מצא את כל מספרים טבעיים אשר זרים לכל המספרים מסוג $2^n+3^n+7^n+42^n-1$ (לכל n טבעי).

7. נתון $a\geq 3$ טבעי. הוכח כי קיימים אינסוף ערכים טבעיים של n שעבורם a^n-1 מתחלק ב-n^2.